

Stochastische Prozesse und Grenzen der Logik: Ein paar unvollständige Gedanken zum Thema

A. Ivanov

Quantenmechanik: Rauschen am Fundament des Universums

Das, was man Rauschen aus der Quantenmechanik nennt, ist ein Zufallsprozess (anschaulich Rauschen genannt), erzeugt durch den Zerfall von Isotopen. Beim Zerfall von Isotopen kann lediglich eine Halbwertszeit bestimmt werden in der die Hälfte eines Isotops zerfallen sein wird. Es ist dagegen nicht möglich, vorherzusagen, wann genau ein *bestimmtes* Elementarteilchen aus einem Isotop abgespalten wird. Daher sind solche Prozesse vollkommen zufällig und sie sind geeignet, um Folgen von Zufallszahlen zu erzeugen.

Ein gewagte Hypothese wäre: Aller Zufall in unserer Welt entsteht also letztlich immer durch oben beschriebene Prozesse (stochastische Prozesse).

Spektrale Leistungsdichte (Spektrum im Frequenzraum) aus Wikipedia.de:

Außer nach physikalischen Ursachen klassifiziert man Rauschen auch nach den Parametern der stochastischen Prozesse, oder nach messtechnisch erfassbaren Größen, welche das Rauschen beschreiben. Zu Letzteren gehört beispielsweise die spektrale Leistungsdichte, das ist die Änderung der Leistung pro (infinitesimal kleiner) Bandbreite. Sie ist im allgemeinen von der Frequenz abhängig.

Die spektrale Leistungsdichte im weiteren Sinne oder die mathematische spektrale Leistungsdichte wird als Fourier-Transformierte der Autokorrelationsfunktion eines stationären Zufallsprozesses gewonnen. (Beispiel: Autokorrelationsfunktion der Rauschspannung über einem ohmschen Widerstand).

Die spektrale Leistungsdichte im engeren Sinne oder die physikalische spektrale Leistungsdichte wird als Fourier-Transformierte der Kreuzkorrelationsfunktion zweier Zufallsprozesse gewonnen. Dabei muss die Kreuzkorrelationsfunktion bei Argument 0 eine physikalisch sinnvolle Leistung sein. (Beispiel: Kreuzkorrelationsfunktion aus Rauschstrom durch einen und Rauschspannung über einem ohmschen Widerstand).

Rauschprozesse mit konstanter spektraler Rauschleistungsdichte im weiteren Sinne nennt man Weißes Rauschen in Analogie zum weißen Licht, das alle Spektren (Frequenzen) des sichtbaren Lichtes mit gleicher Leistung (Intensität) umfasst. Rauschprozesse mit konstanter spektraler Rauschleistungsdichte können in der Realität nicht existieren, da sie unendlich große Leistung transportieren müssten. Allerdings gibt es physikalische Rauschprozesse, deren spektrale Rauschleistungsdichte auch im engeren Sinne in einem extrem großen Frequenzband praktisch konstant sind. Der Einfachheit wegen bezeichnet man diese Prozesse dann auch als "weiß". Dazu gehört beispielsweise das thermische Rauschen und das Schrotstromrauschen.

Einen Rauschprozess mit einer spektralen Leistungsdichte, die in einem für die Praxis relevanten Frequenzbereich deutlich von einem konstantem Wert abweicht, nennt man farbiges Rauschen. Im Gegensatz zu weißem Rauschen gibt es allerdings keine allgemein als verbindlich anerkannte Definition für verschiedene Typen farbiger Rauschleistungsspektren.

So findet man beispielsweise die Bezeichnung Rosa Rauschen sowohl für Rauschen mit einer spektralen Rauschleistungsdichte, die umgekehrt proportional zur Frequenz abfällt, als auch für Rauschprozesse mit einer spektralen Rauschleistungsdichte, die umgekehrt proportional zum Quadrat der Frequenz abfällt.

Um dieser Mehrdeutigkeit zu entgehen, wird in wissenschaftlichen Veröffentlichungen der Begriff $1/f$ -Rauschen für solche Prozesse verwendet, deren spektrale Rauschleistungsdichte umgekehrt proportional zur Frequenz geht.

Unschärfe in der Quantenmechanik

In der Quantenmechanik kann eine Wahrscheinlichkeitsverteilung der möglichen Zustände in denen sich ein Teilchen befinden kann, angegeben werden. Will man wissen, in welchem Zustand sich ein Teilchen in einem Moment befindet, muss man zwangsläufig eine Messung vornehmen und die Verteilung kollabiert zu einem Punkt im Zustandsraum. Eine Messung gleicht der Anwendung eines allgemeinen Operators auf die Menge der möglichen Zustände (über die wir die ebengenannte Verteilung haben). Die Anwendung des Operators verändert das System. Da es nicht möglich ist, Impuls und Ort eines Teilchens gleichzeitig zu bestimmen, ergibt sich eine Unschärfe in den Gleichungen. Je genauer man den Ort misst desto ungenauer der Impuls und vice versa.

Beispiel: Dirac-Puls

Dieser unendlich kleine Puls, enthält alle Frequenzen mit gleicher Intensität. Je länger der Puls desto weniger Frequenzen sind enthalten bis man zu einem unendlich langen Puls übergeht, der genau eine Frequenz enthält (s. o. Fourier-Transformierte).

Dazu heißt es weiterhin in Wikipedia.de:

Die Unbestimmtheitsrelation bezüglich Ort und Impuls ist eine unmittelbare Konsequenz der Wellennatur der Materie in der Quantenphysik und damit eines der fundamentalen Gesetze der Physik. Sie wird oft irrtümlich damit erklärt, dass eine Messung des Ortes eines Teilchens notwendigerweise seinen Impuls stört. Heisenberg selbst hatte diese Erklärung zuerst gegeben. Die Unbestimmtheitsrelation gilt jedoch sogar dann, wenn nach der Messung des Ortes die Messung des Impulses an einer Kopie des Systems erfolgt (siehe Ensemble-Interpretation unten). Ähnliche Unschärfebeziehungen gibt es auch zwischen anderen Paaren physikalischer Größen (siehe allgemeine Unschärferelation unten). Zwischen Energie und Zeit besteht ebenfalls eine Unschärfebeziehung, die aber von anderer Natur ist.

[...]

Die Unbestimmtheitsrelation wird oft verwechselt mit einem anderen quantenmechanischen Phänomen, dem Kollaps der Wellenfunktion, nach dem die Wellenfunktion, die ein Teilchen beschreibt, sich genau dann verändert, wenn dieses Teilchen beobachtet wird. Dieses Phänomen und die Unbestimmtheitsrelation sind verschieden, aber miteinander verwandt [Hervorhebung hinzugefügt].

Im Rahmen des mathematischen Formalismus ergeben sich die Wahrscheinlichkeitsverteilungen für Orts- und Impulsmessungen und damit die Unschärfen aus den zugehörigen Wellenfunktionen. Die Unschärferelation folgt dann aus dem Umstand, dass die Wellenfunktionen bezüglich Ort und Impuls über eine Fourier-Transformation miteinander verknüpft sind. Die Fourier-Transformierte eines lokal begrenzten Wellenpakets ist nun wiederum ein Wellenpaket, wobei das Produkt der Paketbreiten einer Beziehung gehorcht, die der obigen Unschärferelation entspricht.

Gödels Unvollständigkeitssatz und Unschärfe in der Quantenmechanik

Gödels Satz besagt das formale Systeme, bestehend aus Axiomen, nicht jede Aussage, die mit den Axiomen formuliert werden könnte, entscheiden können. Dies ist eine Aussage über Logik und über Axiomensysteme. Sie kann somit nicht unbedingt auf die Unschärferelation der Quantenmechanik angewendet werden, da diese zwei Gebiete nicht isomorph sind, bzw. deren Isomorphie nicht gezeigt wurde. Man sollte also davon ausgehen, dass diese beiden Aussagen nicht miteinander verwandt sind, auch wenn es denn Anschein hat, sie wären es. Die Vermutung, dass Universum könne man als System von Axiomen ansehen, ist nicht gesichert, außerdem ist nicht gesagt, dass Logik Teil des Universums ist, da (jede beliebige) Logik unabhängig vom Universum existieren kann.