

Differentialgleichungen - Eine kleine Übersicht

Aleksandar Ivanov
Technische Universität Dresden

Quellen:

- Merziger et al. (2004): *Formeln + Hilfen zur Höheren Mathematik*, Binomi Verlag, Springe
- Bärwolff, Günter (2005): *Höhere Mathematik*, Elsevier, München
- Hudak, Dietmar (2006): *Mathematik für Wirtschaftsingenieure III*, TU Dresden, Dresden
- Eigene Rechnungen

Vorbemerkungen

- Inhalt dieses Dokumentes: *Beispiele* wichtiger Arten von Differentialgleichungen (DGL) mit Angabe der Lösungsmethode (ohne Rechnung)
- Es existiert keine geschlossene Lösungstheorie für DGLs
- Es existiert eine Vielzahl von Methoden, die jeweils für eine bestimmte Klassen von DGLs entwickelt wurden → Nachzuschlagen in den gängigen Werken (bspw. Merziger (2004) oder Bronstein et al. (2001): *Taschenbuch der Mathematik*, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main)
- Viele DGLs lassen sich nur numerisch lösen → keine exakt-analytischen Lösungen, nur Näherungslösungen mit numerischen Integrationsverfahren (Einschrittverfahren, insb. Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung (RK4), oder Mehrschrittverfahren)
- grafische Lösungsmethoden sind demnach auch wichtige Hilfsmittel für alle Arten von DGLs:

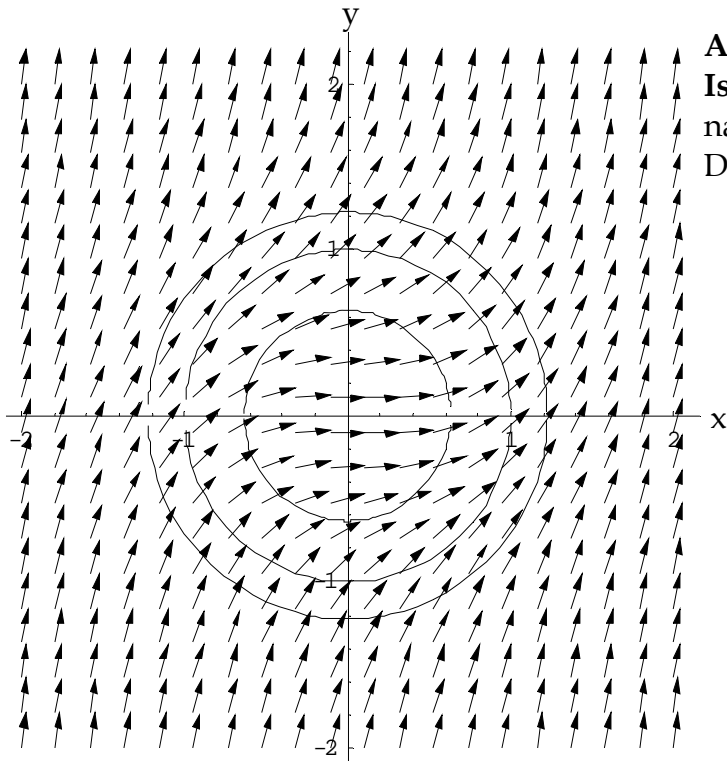


Abb. 1: Richtungsfeld & Isoquanten ($y' = \text{konst}$ setzen, nach $y = f(x, y')$ umstellen) für DGL 1. Ordnung:

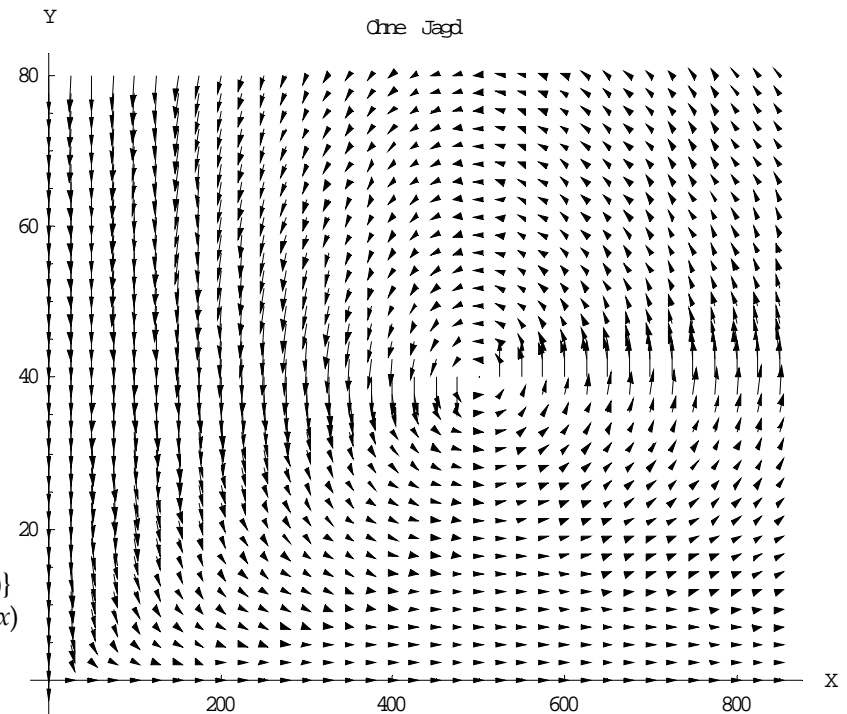
$$y' = x^2 + y^2$$

Abb. 2: Phasenportrait (ohne *Erhaltungsgröße*) für ein System gekoppelter DGLs:

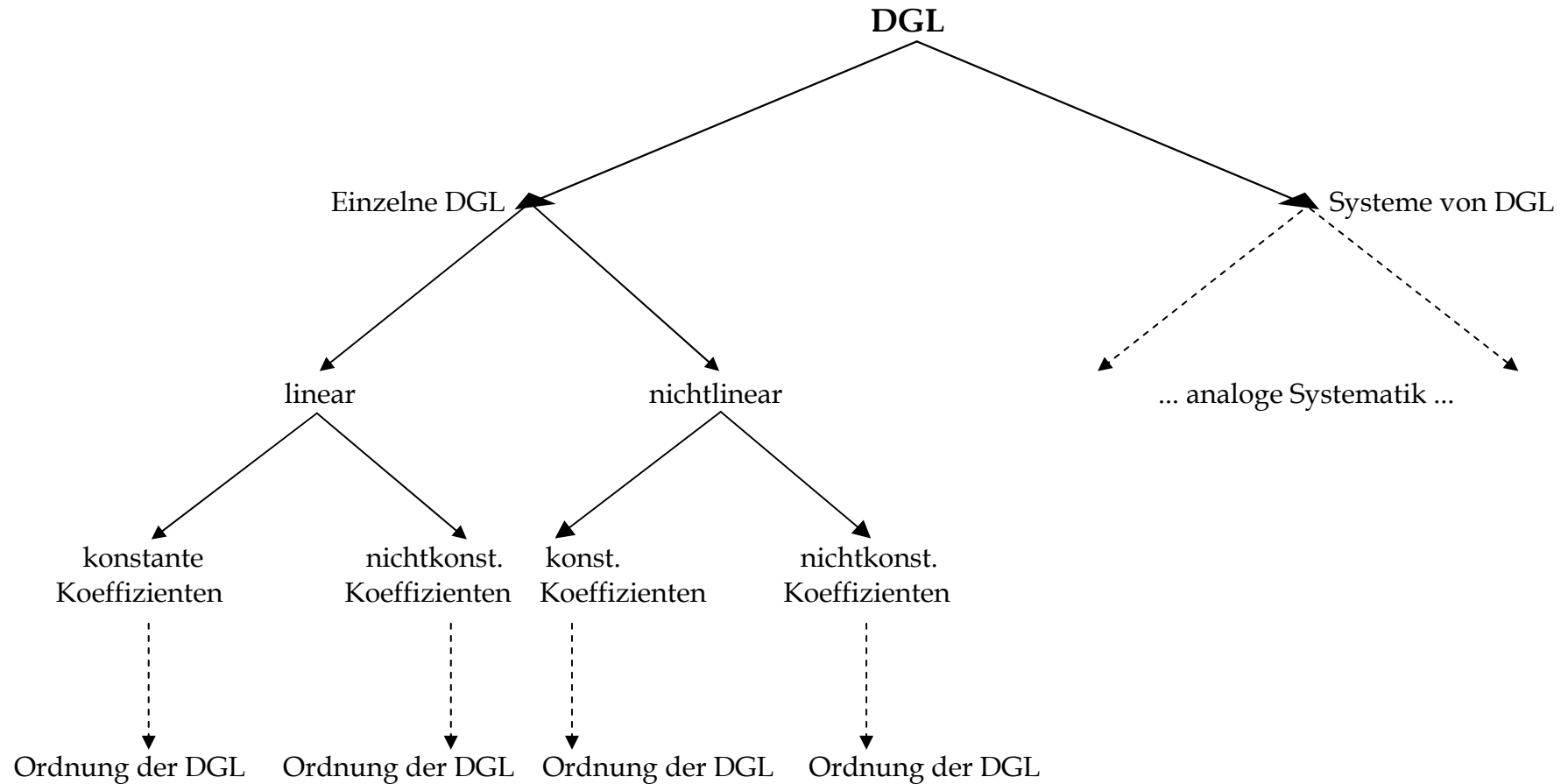
$$y_1 = x' = x(a - by)$$

$$y_2 = y' = y(dx - c)$$

Richtungsfeld $\{(y_1, y_2, [y'_2/y'_1])\}$ für die Bahnkurve $y_2 = y_2(y_1 = x)$ wird auch als Phasenportrait bezeichnet.



Eine hierarchische Systematik für Differentialgleichungen (ohne partielle Differentialgleichungen)



- Bemerkung zur Benennung von DGL:

- wird bspw. auf lineare DGL (DGLs 1. Ordnung) ohne weitere Qualifikationen verwiesen, sind prinzipiell alle Unterarten von linearen DGLs (DGLs 1. Ordnung) gemeint
- DGL, die nicht partielle DGLs sind, werden zur Unterscheidung auch *gewöhnliche DGL* genannt. Hier werden nur gewöhnliche DGL besprochen

Eine lösungsmethodische Systematik für Differentialgleichungen (ohne partielle Differentialgleichungen)

- Bemerkung: DGLs können auch nach den auf Sie anwendbaren Lösungsmethoden klassifiziert werden; eine hierarchische Anordnung ist dann nicht mehr allgemein möglich, so dass man sich grob an wechselnden Klassifikationskriterien (Ordnung, konstante vs. nichtkonstante Koeffizienten, lineare vs. nichtlineare) orientiert (nach Merziger et al. (2004)):

1. Spezielle Typen von Differentialgleichungen 1. Ordnung

- Exakte DGL (integrierender Faktor, auch Eulerscher Multiplikator genannt)
- DGL mit trennbaren Veränderlichen (bspw. Ähnlichkeits-DGL, homogene DGL)
- Nichtlineare DGL 1. Ordnung mit konstanten und variablen Koeffizienten

Komplexität der Lösungsmethoden ist hier wie folgt: $1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6$
--

2. Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung (mit *nicht notwendig konstanten* Koeffizienten)

- Homogene DGL: Allgemeine Lösung y_H | Partikuläre Lösung wird manchmal auch *Spezielle Lösung* genannt |
- Inhomogene DGL: Allgemeine Lösung y_H plus Partikuläre Lösung y_P mittels Variation der Konstanten (VdK, geht immer)

3. Lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung mit *konstanten* Koeffizienten

- Lösungstheorie existiert: Allg. Lösung mit charakt. Polynom, Partikuläre Lösung mit VdK (geht immer) oder mit Speziellem Ansatz

4. Lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung (mit *nicht notwendig konstanten* Koeffizienten) \leftrightarrow System von n linearen DGL 1. Ordnung

- s. a. Ma III Wing, Kap. 4.3, Merziger et al. (2004), S. 159

5. Differentialgleichungen n -ter Ordnung (mit *nicht notwendig konstanten* Koeffizienten) \leftrightarrow System von n DGL 1. Ordnung

- Umformbar in DGL-System von n linearen DGLs 1. Ordnung \rightarrow vektorielle „DGL“ 1. Ordnung mit den normalen Lösungsmethoden behandeln (s. Kap. 2, Merziger Kap. 13.7, Ma III Wing Kap. 4.2.4, S. 5)
- Spezieller *vektorieller* Ansatz bei konstanten Koeffizienten (s. u. Kap. 6)

6. Systeme von Differentialgleichungen

- Fall 1: Äquivalenz einer einzelnen *nichtlinearen* DGL n -ter Ordnung mit einem System von n DGLs 1. Ordnung (Kap. 5)
- Fall 2: Äquivalenz einer einzelnen *linearen* DGL n -ter Ordnung mit einem System von n linearen DGLs 1. Ordnung (Kap. 4)
- Fall 3: System *nichtlinearer* DGLs n -ter Ordnung \rightarrow numerische Lösungsmethoden, Phasenraum betrachten (s. S. 2)
- Fall 4: System *linearer* DGLs n -ter Ordnung \rightarrow System *linearer* DGLs n -ter Ordnung mit *konstanten* Koeffizienten ?

1. Spezielle Typen von (linearen & nichtlinearen) Differentialgleichungen 1. Ordnung

Exakte DGLs: $p(x, y) + q(x, y) y' = 0$ bzw. $p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0$

- Exakte DGL, falls es $F(x, y)$ gibt mit $F_x = p(x, y)$ und $F_y = q(x, y)$.
- Satz von Schwartz: Für stetig diffbare Fkt. mit stetigen partiellen Ableitungen 1. & 2. Ord. gilt: $F_{xy} = F_{yx}$
- DGL, die bereits Form exakter DGL hat, nicht Umformen \rightarrow kann Lösung verändern!
- integrierender Faktor: falls eine DGL der Form $p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0$ keine exakte DGL ist, existiert immer ein integrierender Faktor $\mu(x, y)$, so dass $\mu(x, y)p(x, y)dx + \mu(x, y)q(x, y)dy = 0$ eine exakte DGL ist. Dieser Faktor lässt sich i. Allg. nicht bestimmen, außer man weiß, dass gilt: $\mu = \mu(x)$ oder $\mu = \mu(y)$ \rightarrow Probieren.

- Beispiele:

$$(1/y)dx - (x/y^2)dy = 0, \quad y(0) = 0$$

$$y(x) = x$$

$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^2)dy = 0$$

$$x^3 + 3x^2y^2 + (4/3)y^2 = C$$

$$4xe^{2x+y}dx + (2x - 1)e^{2x+y}dy = 0$$

$$(2x - 1)e^{2x+y} = C$$

$$[(1/x^2) - y] + (y - x)y' = 0, \quad y(1) = -1$$

$$y(x) = x - \sqrt{x^2 + 2/x + 1}$$

$$(y^2 + 2xy)dx + (x^2 + 2xy)dy = 0$$

$$F(x, y) = y^2x + x^2y = 0, \quad C = 0$$

$$[(x^2 + y)/x^2]dx - (1/x)dy = 0$$

$$y(x) = x^2 - Cx$$

$$[(2y - x^3)/x^3]dx - (1/x^2)dy = 0$$

$$y(x) = 2x^2 - x^3$$

DGL 1. Ordnung mit trennbaren Veränderlichen (bspw. Ähnlichkeits-DGL, homogene DGL)

- Vorgehen: TdV \rightarrow Integration \rightarrow Partikuläre Lösung mit VdK (falls nötig AWP₀ bestimmen), wie Kap. 2. unten (Lineare DGL 1. Ordnung)
- häufiger Fall einer Lösung: $y \equiv 0$ (wird oft nicht explizit genannt)

- Beispiele:

$$y' = y$$

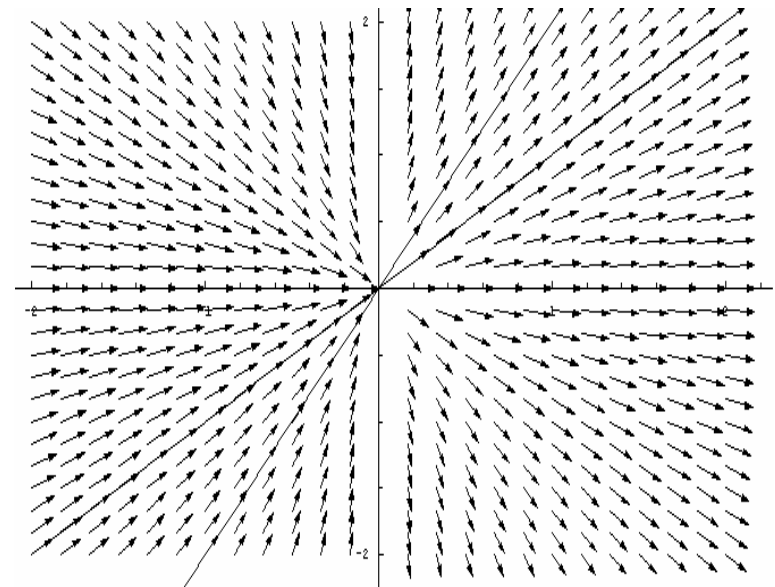
$$y(x) = \frac{1}{4}(x + C)^2 \quad (\text{Lösungsfall: } y \equiv 0, \text{ wird bei anderen Aufgaben nicht mehr mit angegeben})$$

$$y' = (x^2 - 1)$$

$$y(x) = Ce^{(1/3)x^3 - x}$$

$$y' = y/x$$

$$\text{Allg. Lösung} \\ y = Cx$$



Nichtlineare DGL 1. Ordnung mit konstanten und variablen Koeffizienten

- TdV, aber meist nicht analytisch lösbar \rightarrow numerische & grafische Methoden (Isoklinen, Phasenraumdarstellung bei mehrdim. Gl.-Systemen)

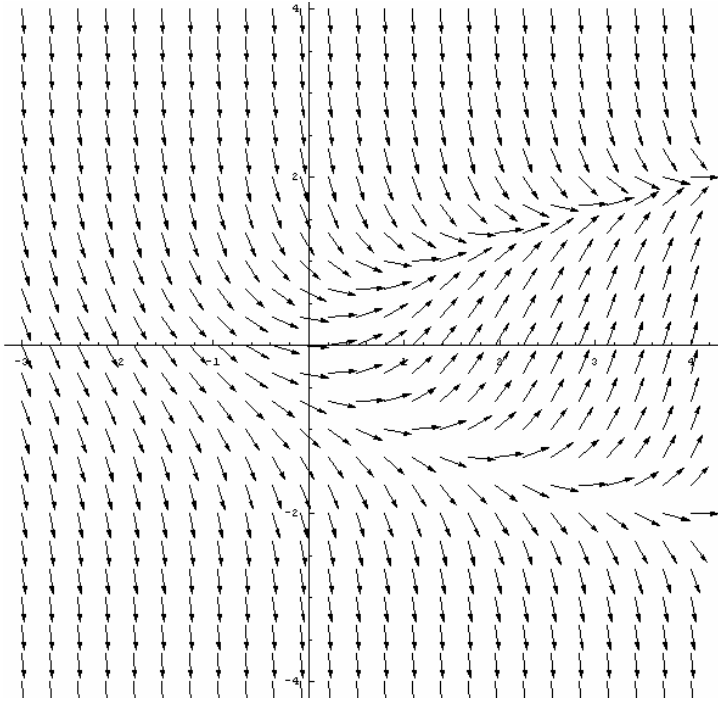
- Beispiele:

$$y' = y^2 + xy^2 \quad \rightarrow \text{TdV möglich}$$

$$y(x) = -2/(x^2 + 2x + C)$$

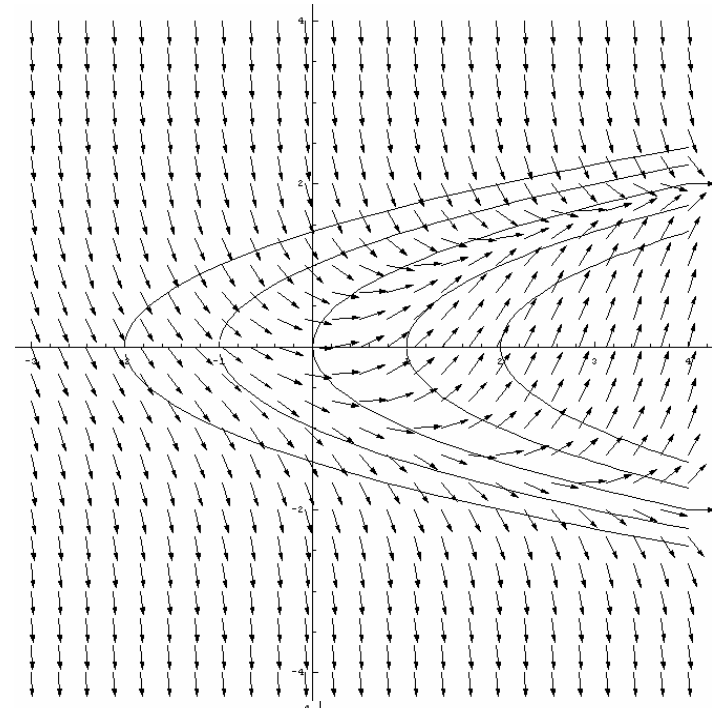
$$y' = x - y^2$$

Richtungsfeld



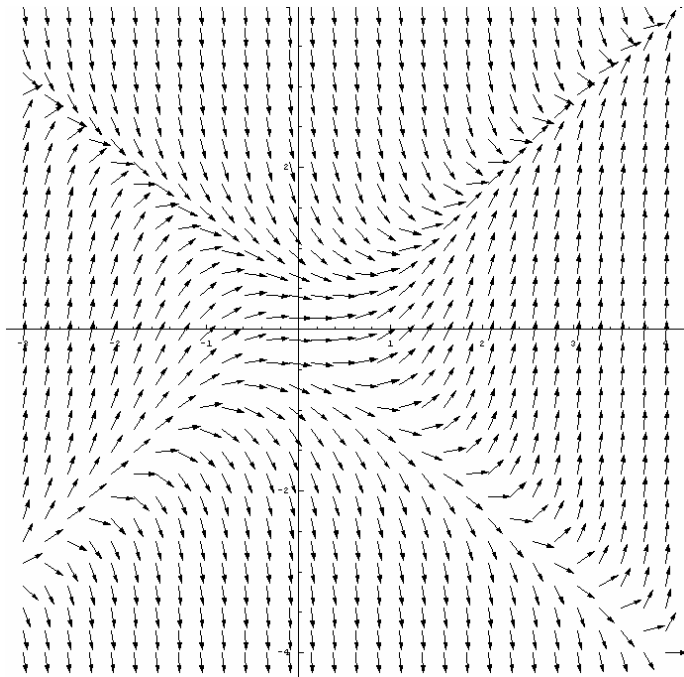
Isoklinen-

schar



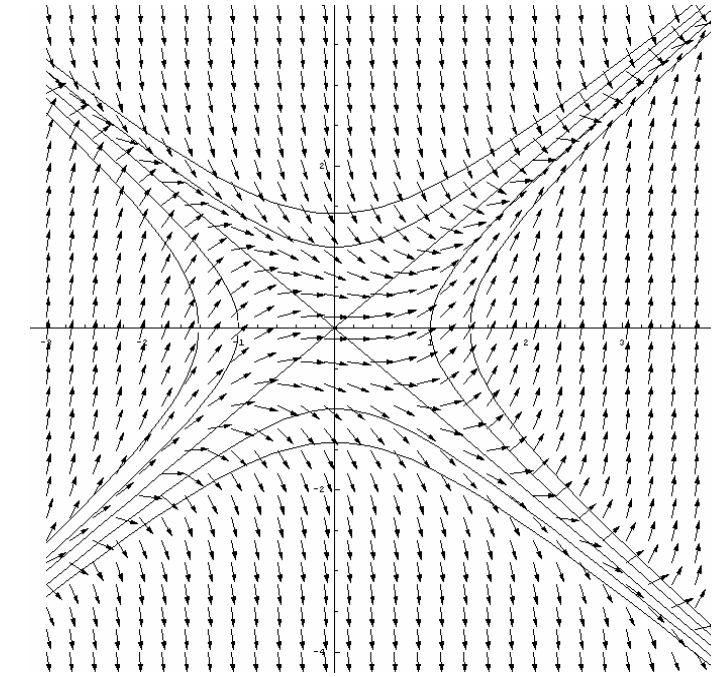
$$y' = x^2 - y^2$$

Richtungsfeld



$$y' = x^2 - y^2$$

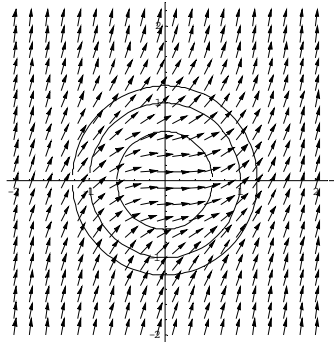
Isoklinen



$$y' = x^2 + y^2$$

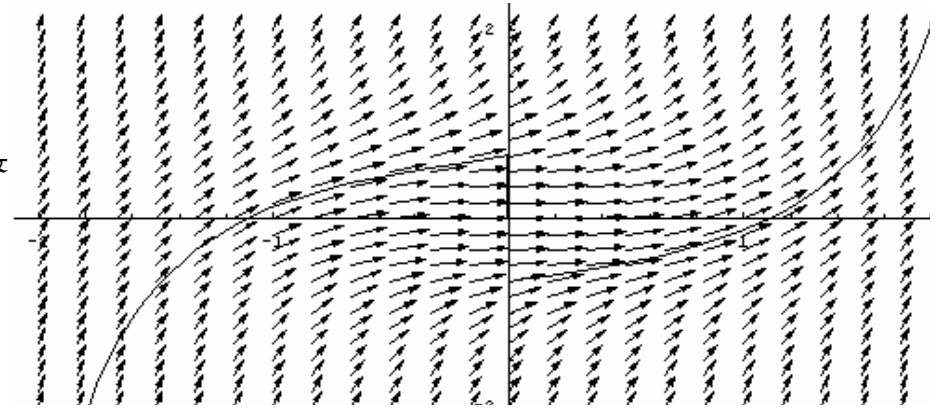
→ Richtungsfeld & Isoklinenschar s.a. Abb.1

Allg. Lösung (rechts):
 $y(x) = f(\text{BesselJ}[x^2/2])$



$$y' = x^2 + y^2$$

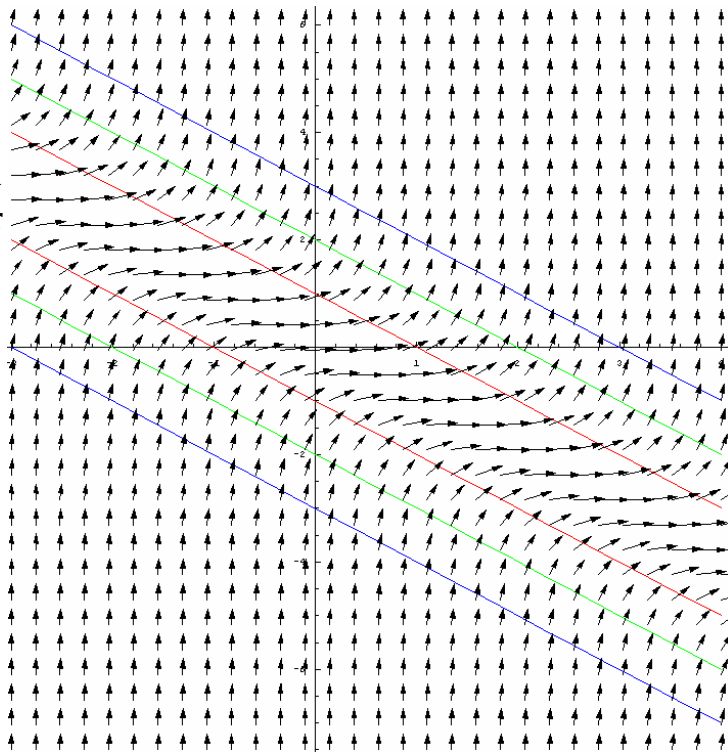
→ Richtungsfeld & Allg. Lösung



$$y' = (x + y)^2$$

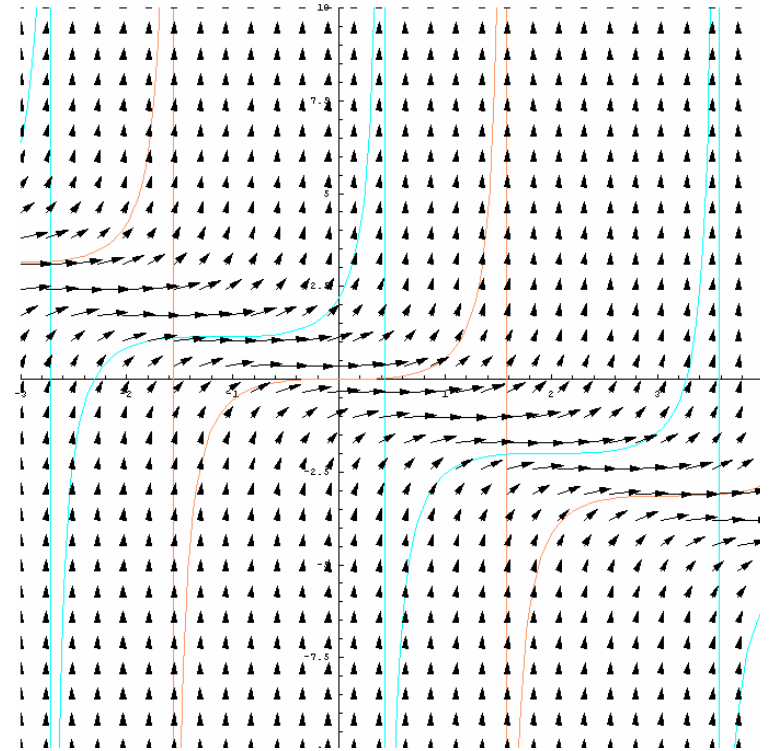
→ Richtungsfeld & Isoklinenschar

Allg. Lösung:
 $y = \tan x + C - x$



$$y' = (x + y)^2$$

→ Richtungsfeld & Allg. Lösung
 $y = \tan x + C - x$



2. Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung: $y' + a(x)y = r(x)$

- in Ma III Wing (Kap 4.3.1) wird andere Standardform, und damit auch andere angepasste VdK-Lösungsformel, genutzt: $y' - a(x)y = r(x)$

- Methode:

* Lösung der zugehörigen homogenen DGL: Trennung der Veränderlichen (TdV) - Umstellen zu $\int dy/y = \int a(x)dx = A(x) + k$

* Partikuläre Lösung der inhomogenen DGL: Variation der Konstanten (VdK) - $C(x) = \int r(x)e^{-A(x)}dx$ - eine Lös. reicht \rightarrow unbest. Integral

- Beispiele:

$$y' = 2xy$$

$$y(x) = Ce^{x^2}$$

$$y' - y = 1$$

$$y(x) = Ce^x - 1$$

$$(1 + e^x)yy' = e^x, \quad y(1) = 1$$

$$y(x) = \sqrt{[2 \ln [(e^x + 1)/(e + 1)] + 1]}$$

$$(1 + x^2)y' - 2xy = 0$$

$$y(x) = C(1 + x^2)$$

$$y = x(1 - x)y' + x^2 + 1, \quad y(2) = 5$$

$$y(x) = 1 + x^2/(x - 1)$$

$$xy' + (y + 1) \ln x = 0, \quad y(1) = -1$$

$$y(x) = -1$$

$$y' - xy = 2x, \quad y(0) = 2$$

$$y(x) = 4e^{(1/2)x^2}$$

$$(x^2 + 2)y' + xy - x(x^2 + 2) = 0$$

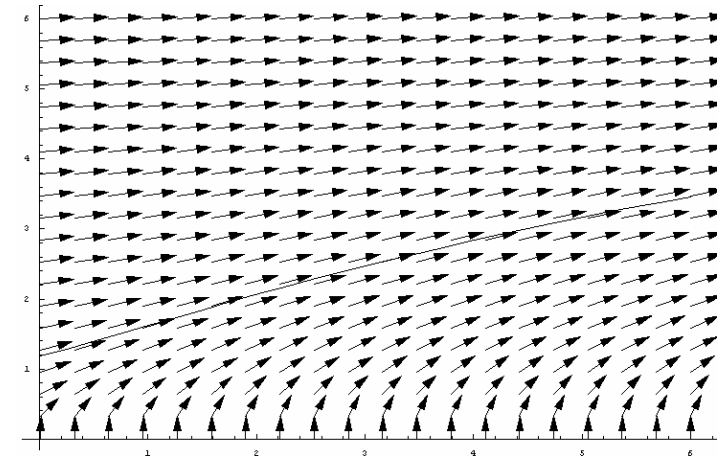
$$y(x) = C/\sqrt{[x^2 + 2]} + (1/3)(x^2 + 2)$$

$$xy' + y = x \sin x$$

$$y(x) = C/x - \cos x + \sin x/x$$

$$y' = y \tan x + 1$$

$$y(x) = C/\cos x + \tan x$$



Richtungsfeld & AWP₀-Lösung der 3. Beispiel-DGL

3. Lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung mit *konstanten* Koeffizienten

- Lösungstheorie existiert: Allg. Lösung mit charakt. Polynom, Partikuläre Lösung mit Speziellem Ansatz oder mit VdK (geht immer)
- s.a. Ma III Wing, Kap. 4.3.2 – Allgemeine Form: $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = r(x)$, $a_k \in \mathbb{R}$

- Methode : Allgemeine Lösung

+ {Variation der Konstanten (VdK)

oder Spezieller Ansatz mit einem allgemeinen Polynom, nicht dem Polynom des Restglieds der aktuellen DGL}

- Spezieller Ansatz: Ist die Störfunktion vom Typ $r(x) = P(x)e^{ax}\cos(bx) + Q(x)e^{ax}\sin(bx)$, a, b reelle Zahlen und P, Q Polynome macht man den Ansatz

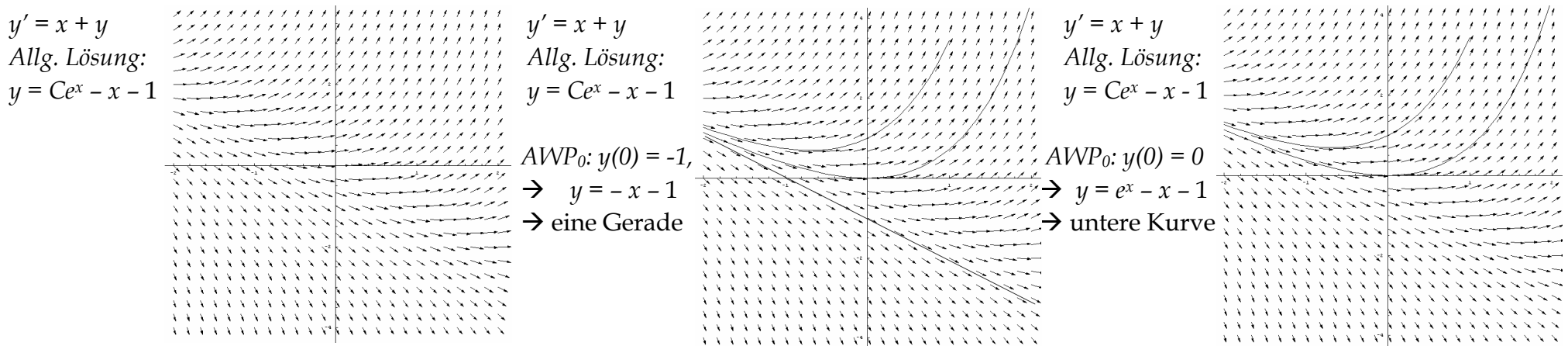
(a) Normalfall (keine Resonanz: $a \pm bi$ nicht Lösungen der charakteristischen Gleichung):

$y_s = P_s(x)e^{ax}\cos(bx) + Q_s(x)e^{ax}\sin(bx)$, P_s und Q_s sind *allgemeine* Polynome mit unbestimmten Koeffizienten mit $\text{Grad } P_s = \text{Grad } Q_s = \max\{\text{Grad } P, \text{Grad } Q\}$

(b) Resonanzfall ($a \pm bi$ k -fache Lösungen der charakteristischen Gleichung):

Man multipliziert den Normalfall-Ansatz mit x^k . Beispiel: $x^2(Ax^2 + Bx + C)$

- Beispiele:



$$y'' + 2y' - 3y = 0$$

$$y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x$$

$$y''' - y'' - 2y' = 0$$

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}$$

$$y'' - y' = -2x$$

$$y(x) = x^2 + C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x}$$

$$y''' + 2y'' + y' = 2\sin x$$

$$y(x) = -\sin x + (C_1 + C_2)e^{-x} + C_3$$

$$y^{(4)} - 16y = 1 - 2x$$

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos(2x) + C_4 \sin(2x) + (1/8)x - 1/16$$

$$y'' - 4y' + 13y = e^{2x} \sin(3x)$$

$$y(x) = -(1/6)x e^{2x} \cos(3x) + e^{2x} [C_1 \cos(3x) + C_3 \sin(3x)]$$

$$y'' + 2y' + 5y = 5x + 2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

$$y(x) = x$$

$$y^{(5)} + a_4 y^{(4)} + a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

$$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + C_4 \cos x + C_5 \sin x$$

4. Lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung (mit *nicht notwendig konstanten Koeffizienten*)

- Für $n > 1$ nötig: in System von n linearen DGL 1. Ordnung umformen \rightarrow analog Kap. 5 (Ma III Wing, Kap 4.3), Lösung nur in Spezialfällen möglich (konstante Koeffizienten, s. Kap. 6, Fall 4) \rightarrow Numerik
- Charakterisierung der Lösungen: Ist die Matrix \mathbf{A} (s. u.) vom Typ $(n \times n)$, so hat das System genau n linear unabh. Lösungsfunktionen $y_i \rightarrow$ Fundamentalsystem; Superpositionsprinzip gilt auch bei Systemen linearer DGLs (Merziger et al. (2004), S. 159, Ma III Wing, Kap. 4.3, S. 3)
- Beispiele: $y'' - [(x+2)/x]y' + [(x+2)/x^2]y = x$ lineare DGL 2. Ordnung mit nichtkonstanten Koeffizienten. Mit $y_1 = y$ und $y_2 = y'$ folgt

$$\begin{aligned}
 y_1' &= y_2 \\
 y_2' &= -\frac{x+2}{x^2} y_1 + \frac{x+2}{x} y_2 + x
 \end{aligned}
 \quad \text{bzw.} \quad
 \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{x+2}{x^2} & \frac{x+2}{x} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}(x)} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$$

5. Differentialgleichungen n -ter Ordnung (mit *nicht notwendig konstanten* Koeffizienten)

- Umformbar in DGL-System von n DGLs 1. Ordnung (mit den vektoriellen Analogon der Lösungsmethoden in Kap. 2 behandeln (s. Ma III Wing Kap 4.2.4) - bei DGL-Systemen bietet sich immer eine Phasenraumdarstellung an (s. S. 2)
- s. a. Kap. 6, Merziger Kap. 13.7, bei allg. DGLs (bel. Koeffs etc.) kommt oft nur numerische Integration als einzige Lösungsmethode mögl.

- Methode der Umformung: $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ kann als System von n DGLs 1. Ordnung geschrieben werden

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 (= y'') \\ y_3' &= y_4 (= y''') \\ &\dots \\ y_n' &= f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \end{aligned}$$

Dazu ersetzt man $y = y_1, y' = y_2$ usw. bis y_n , wo besondere Substitution $y_n = f(x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$ erfolgt. Das System links ist ein Spezialfall eines allgemeinen Systems von n DGLs 1. Ordnung (Kap. 6) für die Funktionen $y_1(x), y_2(x), y_3(x), \dots, y_n(x)$ [s. rechts].

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2'(x) &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_3'(x) &= f_3(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\dots \\ y_n'(x) &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned}$$

In vektorieller Schreibweise mit

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \dots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}, \quad f(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \\ \dots \\ f_n(x, y) \end{pmatrix}$$

ergibt sich $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$, was eine n -dimensionale „DGL“ 1. Ordnung ist, und somit die Methoden aus Kapitel 2 in vektorieller Form analog anwendbar sind.

- Beispiel für Umformung: Gegeben sei eine (nichtlineare) DGL 3. Ordnung $y''' = y''y - xy' + 3x$

Substitution:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= y \\ y_2 &= y' \\ y_3 &= y'' \end{aligned} \right\} \implies \begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ y_3' &= y_3 y_1 - x y_2 + 3x \end{aligned}$$

- Beispiel :

$$y'' + (1/x)y' - (1/x^2)y = 0 \qquad y = C_1x + C_2(1/x)$$

6. Systeme von Differentialgleichungen

Fall 1: Äquivalenz einer einzelnen *nichtlinearen* DGL n -ter Ordnung mit einem System von n nichtlinearen DGLs 1. Ordnung

- s. Kap. 5

Fall 2: Äquivalenz einer einzelnen *linearen* DGL n -ter Ordnung mit einem System von n linearen DGLs 1. Ordnung

- s. Kap. 4 und Merziger (2004, S. 167 f.)

Fall 3: System *nichtlinearer* DGLs n -ter Ordnung

- numerische Lösungsmethoden, Phasenraum betrachten (s. S. 2)

Fall 4: System *linearer* DGLs n -ter Ordnung

- System *linearer* DGLs n -ter Ordnung mit *konstanten* Koeffizienten \rightarrow Lösungsmethoden ?, In System von DGLs 1. Ordnung überführen (Normalform, s. Bronstein, Kap. 9.1.2.5 – Punkt 1) ?

7. Lineare Stabilitätsanalyse linearer & nichtlinearer DGLs (V Nonlin Kap 2.8 & 4, Canty)

... [Große Bild-Matrix mit Diskriminanten von Karsten Peters + Matrix-Eigenwerte von Canty + Taylor-Entwicklungen und führende Ordnungen an hyperbolischen & nicht-hyperbolischen Fixpunkten (V Nonlin Kap 4.1 & 4.2, Echhard (2004): Chaos, Fischer Verlag)]

8. Lyapunov-Exponenten

...