

Kurzeinführung in das Computeralgebrasystem Mathematica

Aleksandar Ivanov

25.6.2005, 8.00 – 9.30 Uhr

1. Was ist Mathematica

Weite Definition

- * Ein Computerprogramm, das zum Modellieren und Programmieren jedweder formalisierbaren Problems dient.
- * Das wohl mächtigste und vielseitigste Programm, das für Computer existiert (etwa Textverarbeitung, Kalkulation, Programmierung, Bild- und Tonbearbeitung, Textsatz, etc.)

Enge Definition:

- * Kann (fast) alle mathematischen Probleme lösen (Arithmetik & Numerik, Aussagenlogik, Differenzieren, Integrieren, Differentialgleichungen, Lineare Algebra, Vektoranalysis, Funktionentheorie, Stochastik, Dynamik & Chaos, Optimierung, etc.)

Vorteile von Mathematica:

- * nicht nur numerische Berechnungen, sondern auch **symbolische** Analysis möglich (bspw.: Ermitteln eines unbestimmten Integrals)
- * Exzellente Animations- und Grafikfähigkeiten (siehe Anhang 2)
- * Kompatibilität mit vielen Formaten und Programmen (Bsp: Mit dem enthaltenem *MathLink* Interface ist Kommunikation mit Excel möglich! Export von Mathematica-Dateien in TeX-Format möglich!)
- * Komfortable Bedienoberfläche
- * Gute Programmierfähigkeiten → Bearbeiten großer & komplexer Probleme

Nachteile von Mathematica:

- * Wie bei jedem wissenschaftlichen Programm: Lange Einarbeitungszeit – Learning bei Doing ist die m.E. beste Methode.
- * Hoher Leistungs- und Speicherbedarf (heutzutage eher irrelevant)
- * Hohe Anschaffungskosten (Uni-Lizenzen weit günstiger)

2. Start von Mathematica und Benutzeroberfläche

Kernel & Palettes & Windows → siehe Online-Hilfe von M.

3. Wichtige (Arbeits-) Prinzipien von Mathematica (siehe auch A1.0.)

3.1 Konstitutive Prinzipien von Mathematica

Listen, Ausdrücke (expressions) und Verschachtelung:

Die Struktur von Mathematica basiert auf dem Prinzip einer Liste, die Elemente enthält und folgende Form hat: **{elem1, elem2,..., elemn}**.

Des weiteren besteht jeder Ausdruck in M. (die Elemente der Listen) aus einem Kopf und einem Körperinhalt nach dem Muster: **Head[Body]**.

Bsp: Der Ausdruck $2+3$ wird in Mathematica intern als **Plus[2,3]** dargestellt.

In tieferen Ebenen als **{Plus,{2,3}}**. Man sieht dass der Kopf Plus und der Inhalt des Körpers **[2,3]** die Oberelemente der Liste **{Plus,{2,3}}** sind, dabei ist der Körper als Element **{2,3}** dargestellt, was selbst eine Liste ist.

Ausdrücke haben die immer die Form **Head[Body]** und können beliebig **verschachtelt** werden, was in der Listen-Struktur von M. problemlos dargestellt wird.

Bsp.: **Limit** $\left[\frac{1}{x}, x \rightarrow 0, \text{Direction} \rightarrow 1\right]$ Der Kopf ist **Limit** (Grenzwerte), im **Körper** steht eine Ausdruck $1/x$ und einige Optionen zum Befehl **Limit**, welche durch Kommas getrennt werden.

Kontext, Case Sensitivity, Symbole und reservierte Wörter:

Mathematicas Algorithmen werden mit großgeschriebenen Befehlen aufgerufen.

Bsp.: **Sin** ist ein reserviertes Wort in M., **sin** dagegen nur ein nutzerdefiniertes Symbol. *Sin* ist auch ein Symbol (dazu später mehr).

Alle Befehle sind reservierte Worte und können nicht anders verwendet werden (Fehlermeldungen enthalten ggf. diesen Hinweis).

In Mathematica gibt es den wichtigen Begriff **Kontext**. Es bezeichnet eine Art virtuellen Namens- und Arbeitsraum. In jedem Kontext kann eine Variable nur einmal vorkommen. Definiert man sie zweimal, wird die erste Definition überschrieben. Ausnahme: Lokale Variablen in *Module* und *Block* Anweisungen (siehe Anhang 1.0.).

Alle Mathematica Befehle (reservierte Worte) sind Symbole, die zum Kontext *System* gehören. Sie sind also im Namensraum *System* beheimatet. Alle nutzerdefinierten Symbole (Variablen, Funktionen $f[x]$, etc.) sind im Namensraum *Global* angesiedelt.

Will man nähere Informationen zu einem Symbol, so gibt man ein: **?Symbolname**.

Will man alle verfügbaren Informationen, so gibt man ein: **??Symbolname**.

Möchte man Symbole löschen ist einzugeben: **Clear[Symbolname1, Symbol2, ..., n]**.

Die Arbeitsdateien von M. heißen Notebooks; Dateierdung .nb. Sie enthalten alle Eingaben, aktive Berechnungen, Text und bei Bedarf auch problemlos Bilder und Sounds. Durch die exzellenten Exportfilter von M. kann man bspw. Seine gesamten Berechnungen, erzeugten Grafiken, Kommentare, Texte, etc. eines Notebooks als TeX-Datei exportieren (Mathematica erzeugt selbständig (!) alle nötigen Befehle zu Laden von evtl. benötigten TeX-Bibliotheken) und in die Druckvorstufe geben (*Frage: In welchem Textverarbeitungsprogramm schreibe ich meine Dissertation / Diplomarbeit? – Antwort: Mathematica.*).

Packages:

Enthalten diverse Algorithmen. In Mathematica enthaltene Packages reichen für die meisten Anwendungen, spezielle Packages finden sich im Netz (s. Anhang 1).

Ähnlich den Toolboxes von *MatLab* oder den Do-Files von *STATA* kann man sich eigene Packages oder Programme definieren, dies fei im Internet verteilen und für seine Problemstellungen in der eigenen Forschung nutzen.

3.2 Praktisches Arbeiten mit Mathematica

- **Shift + Enter** löst Berechnung aus
- **Alt + ;** unterbricht laufende Berechnung
- Nie zögern, die Online-Hilfe zu nutzen: Das essentielle Arbeitswerkzeug für M.!
- Doppelklicken auf senkrechte blaue Streifen rechts in einem Notebook, schließt und öffnet Zellen wie bei einem Verzeichnisbaum. → Übersichtlichkeit bei langen Notebooks.

Everyday Mathematica Befehle (Details Benutzung siehe Mathematica Online-Hilfe)

TraditionalForm[.] – Ausgabe in klassischer Schriftform (wie in publizierten Papers)

FullForm[.] – Ausgabe in Mathematica-interner Darstellung (Bsp: Plus[2,3])

StandardForm[.] – Defaulteinstellung von Mathematica. Keine Anweisung nötig.

f// # – wendet # auf jedes Element von f an. # Kann theoretisch jeder Befehl sein, wenn er sinnvoll interpretierbar ist

Bsp.: Expand[(m+n)^2] → $m^2 + 2mn + n^2$
Expand[(m+n)^2]//TraditionalForm → $m^2 + 2nm + n^2$
Expand[(m+n)^2]//N → $m^2 + 2mn + n^2$ (keine

Änderung, da m & n keine numerischen Werte zugewiesen wurde; sie sind Symbole. Folglich existiert keine numerische Repräsentation von (m+n)².

Simplify[.] – Vereinfacht Ausdrücke

Factor[.] – Linearfaktoren von Ausdrücken (falls möglich)

FullSimplify [.] – wie zuvor, aber Anwendung umfangreicherer Regeln

Plot[.] – 2-dimensionale Grafiken, viele Optionen (siehe Hilfe)

TableForm[list[...]] – Strukturierte Ausgabe von Listen

Solve[.] – Liefert Lösungen für x

Bsp.: Solve[Cos[2x] == 0, x] → $\left\{ \left\{ x \rightarrow -\frac{\pi}{4} \right\}, \left\{ x \rightarrow \frac{\pi}{4} \right\} \right\}$

NSolve[.] oder Solve[.]//N – wie oben nur numerische Näherungen

Bsp.: NSolve[Cos[2x] == 0, x] → $\{ \{x \rightarrow -0.785398\}, \{x \rightarrow 0.785398\} \}$

D[.] – partielle Ableitung nach ...

Dt[.] – totales Differential

Integrate[.] – unbestimmtes / bestimmtes Integral

F[x_,y_] :=Ausdruck – definiert in M. eine Funktion F mit 2 Argumenten

Regeln, Muster, Platzhalter, direkte Wertzuweisung, verzögerte Wertzuweisung

Diese Konzepte sind wichtig und nützlich aber etwas schwer verständlich, daher sollen Sie an dieser Stelle kurz erläutert werden.

All diese Konzepte haben mit der Zuweisung von Werten zu Symbolen (so wie wir Menschen einer Variable in einer Funktion, gelegentlich auch einen Wert zuweisen.) zu tun.

Platzhalter:

Werden wie folgt definiert: **Platzhaltername**_. Zum Beispiel wir in M. eine Funktion f von x wie folgt definiert: $f[x_] := x^2$. Hierbei kommt auch das Konzept der **verzögerten Wertzuweisung** durch Zeichen **:=** zur Anwendung. Im Gegensatz dazu ist $x = 2$ eine **direkte Wertzuweisung**. Dem **Symbol** x wir der **Wert** 2 zugewiesen. Würde man jetzt eingeben f[x], so erhielte man als Ausgabe den numerischen Wert 4. Jedes Mal, wenn die Funktion f so aufgerufen wird, wird sie gemäß ihrer obigen Definition evaluiert (= verzögerte Wertzuweisung). Da x nun aber einen Wert hat, war die Ausgabe das Resultat der Evaluierung. Ohne Wertzuweisung von x, würde man lediglich x^2 als Ausgabe erhalten.

Regeln und Muster sind komplexere Konzepte. Als Vorbetrachtung benötigen wir eine kurze Übersicht:

- global:** Alle nutzerdefinierten Symbole und deren **Wertbindungen** wirken global (Stichwort: Kontext *Global*) in allen geöffneten Notebooks. Löschen von Werten und Symbolen mit: **Clear, ClearAll, Remove**.
- lokal:** Anweisungen wie **Module** oder **Block** ermöglichen die Verwendung lokal definierter Symbole. (Weiterhin sind Hilfsvariablen wie Laufindizes von sequentiellen Ausdrücken lokal definiert: **Do, Table, Sum, ...**)
- temporär:** Wertzuweisungen für globale Symbole sind nur während der Evaluierung eines Ausdruckes gültig. Verwendung von **Regeln & Mustern**

Quelle: Anhang 0.1 - Scheffer: Mathematica Skript, Kap. 3.7., TU Dresden, 2005.

Regeln & Muster als dritte Art der Wertzuweisung (neben global & lokal):

Statt global (einfach nutzerdefinierte Symbole) oder lokal (mit Block, Module Anweisungen), nur **temporäre** Wertzuweisung zu Symbolen **während der Evaluierung eines Ausdruckes** (dies ist häufig sehr nützlich; erspart Definition neuer Variablen oder Blöcke; bietet Raum zu Probieren & Experimentieren mit Ausdrücken).

Wichtig: Auch bei Regeln & Mustern, gibt es eine sofortige (=direkte) \rightarrow und verzögerte \Rightarrow Wertzuweisung.

Muster = Eine Regel **Rule**[u _], die aber nur nach der allgemeinen Struktur von Rule (bspw. Der funktionalen Form) und nicht nach der konkreten Variable namens u sucht.

Bsp.: Definition eines Musters: **Cos**[x_] \rightarrow **Sqrt**[1 - **Sin**[x]^2]

x_ ist ein Platzhalter: Jeder Ausdruck **Cos**[z] mit einem beliebigen Ausdruck z wird durch **Sqrt**[1 - **Sin**[z]^2] ersetzt

Anwendung von Regeln und Mustern:

Erfolgt über **Replace**, **ReplaceAll** und **ReplaceRepeated** (Details s. Hilfe)

Bsp.: **ReplaceAll**[3***Cos**[g]^2 - 1, **Cos**[x_] \rightarrow **Sqrt**[1 - **Sin**[x]^2]]

oder in **Kurznotation**: 3***Cos**[g]^2 - 1//. **Cos**[x_] \rightarrow **Sqrt**[1 - **Sin**[x]^2]

Ausgabe: -1 + 3 (1 - **Sin**[g]^2)

Bei **Regelsystemen** (eine Menge von Regeln), werden diese von M. in geeigneter Weise "gleichzeitig" angewandt. Anwendung: **Replace**[**Ausdruck**, { . }] oder in Kurzform: **Ausdruck**//. { . } .

4. Einführung anhand von Beispielen im vorgefertigten Notebook

- Bitte öffnen Sie das Notebook *001_introduction_slide_show_Kommentiert.nb*
Notizen können per Hand, Online-Notizen im Notebook (mit (* ... *)), oder in einer Word-Datei gemacht werden.
- Falls kompliziertere Fragen auftreten, bitte diese notieren.
- Ein klassisches BWL-Problem: *Lagrange Optimierung im Materialeinkauf.nb*

5. Fragen & Hausaufgabe

- Fragen?
- Hausaufgabe zur Einübung von Mathematica: siehe Anhang 3

6. Anhang

Anhang 1: Weitere Quellen & Inspiration:

0.1) Nach dieser Einführung empfiehlt es sich anhand des aktuellen Mathematica Skriptes des Fachbereiches Mathematik der TU Dresden unter http://www.math.tu-dresden.de/~scheff/mathematica_2005/ direkt ein „Working Knowledge“ für Mathematica aufzubauen.

0.2) Eine weniger umfassende und praktischere Einführung findet sich unter www.usf.uos.de/~fhilker/Courses/Systemwiss1/ws2003/crash_course_2003.nb

1.) Das Mathematica Buch (in Online-Hilfe von Mathematica enthalten) ist *die* umfassende Referenz zum Programm.

2.) Kurzeinführung in Mathematica aus Sicht eines Physikers:

<http://theorie.physik.uni-wuerzburg.de/~reents/vorkurs/MathIntro.pdf>

3.) Kurzeinführung in Mathematica aus Sicht VWLers:

David A. Belsley: *Mathematica as an Environment for doing Economics and Econometrics*, 1997, Boston. <http://fmwww.bc.edu/ec-p/wp364.pdf>

4.) In Google eingeben: Suchbegriff +filetype:nb - findet nur Mathematica Notebooks, die interessante Anwendungen, Implementierungen, etc. zum jeweiligen Suchbegriff enthalten!

5.) MathWorld: <http://mathworld.wolfram.com/> weltgrößte Mathe-Ressource (lt. Selbstauskunft) von den Herstellern von Mathematica

6.) Viele Tools finden sich unter Wolframresearch.com, insb. im Bereich „Resources“ unten → „Other Web Resources“. Direkte URL: <http://www.wolfram.com/services/> (unten auf dieser Seite)

7.) Bronstein et al.: Taschenbuch der Mathematik, **Kap. 20**, 5. Auflage. Schnelle Referenz für Mathematica in Kap. 20 des aktuellen Bronstein.

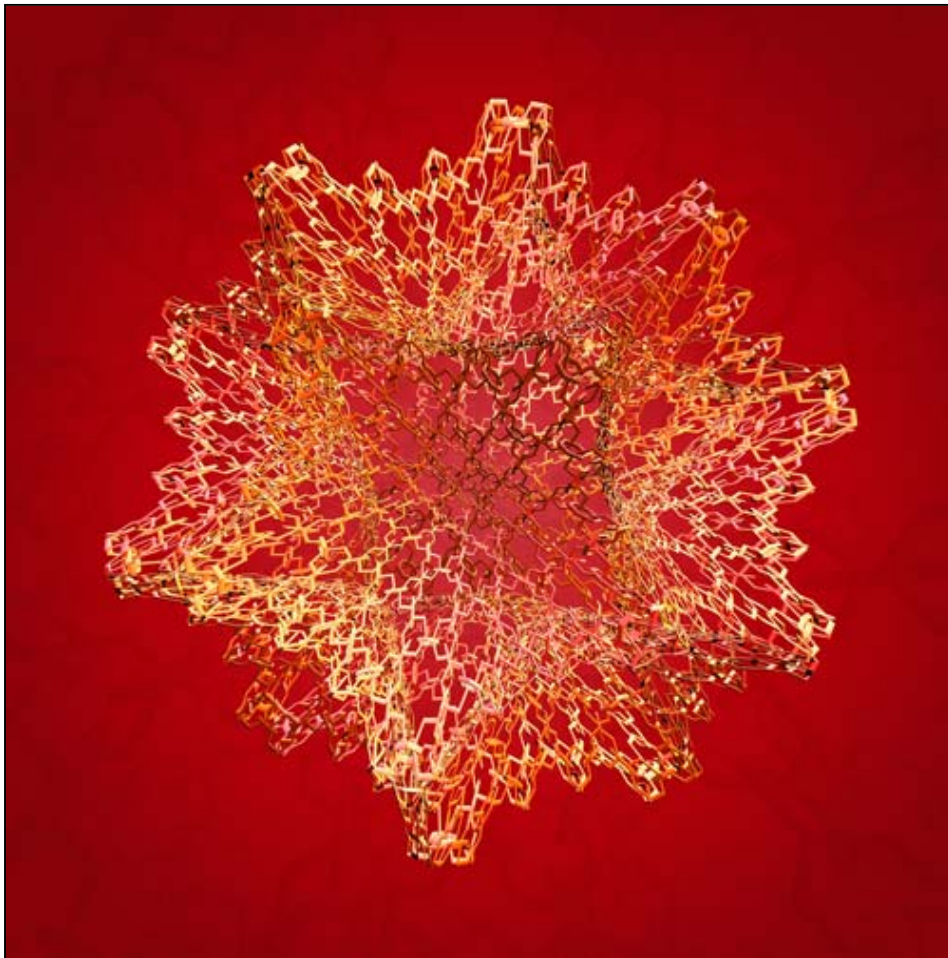
8.) Varian, Hal R.: Economics & Financial Modelling with Mathematica, Springer-Verlag, 1993, Santa Clara, CA.

oder

Varian, Hal R.: Computational Economics and Finance, Springer-Verlag, Santa Clara, CA.

Beide Bände enthalten Paper verschiedener Autoren mit *anspruchsvollen* Modellen und deren Umsetzung in Mathematica, hauptsächlich aus den Bereichen VWL und Finanzen. (Günstig bei www.amazon.com und www.abebooks.de)

Anhang 2: Mathematica & Kunst



Generated by Michael Trott using Mathematica 5, © Wolfram Research 2001-2005

Quelle: http://gallery.wolfram.com/images/Surfaces/1/00_dodecahedronCage

Anhang 3: Hausaufgabe (*Zur Bearbeitung müsste 1 Woche reichen.*)

Unternehmenswert

Überblick:

Unser Unternehmen, die EE^2 AG, ist seit nunmehr 2 Jahren erfolgreich am Markt für E's tätig. Wir befinden uns momentan am Anfang von Jahr 3 (Anfang 2005). Es soll der Unternehmenswert mittels *Mathematica* berechnet werden. Die Aufgabenstellung folgt im Anschluß.

Da unser Unternehmen keine Anteilsscheine ausgegeben hat, die auf einem liquiden Markt gehandelt werden, kommen marktbasierende Bewertungsmethoden weder für Fremd- noch Eigenkapital in Frage.

Unser Unternehmen beansprucht nur kurzfristiges Fremdkapital dessen Anteil relativ zum Umsatzvolumen konstant sein soll aber in Zukunft die Grenze von EUR 50.000 nicht überschreiten soll, da nun das Unternehmen groß genug ist, um Erweiterungsinvestitionen und Materialeinkäufe fast vollständig aus den operativen Mitteln zu finanzieren. Daher wird bei der Bewertung des Unternehmens nach dem Entity-Prinzip verfahren und ein abgewandelter APV-Ansatz (Adjusted Present Value) benutzt, bei dem sich die FK-Kosten und die Steuervorteile des FK (Tax Shield) als eine Funktion des Marktwachstums bei konstantem Marktanteil von Unternehmen 1 aus dem Umsatzvolumen ergeben.

Nach dem folgendem Schema wird der Freie Cash-Flow ermittelt (Perridon/Steiner):

- 1.) operatives Ergebnis vor Zinsen und Steuern (a.k.a. EBIT, Betriebsergebnis)
 - 2.) – fiktive Steuern auf [EBIT – Fremdkapitalzinsausgaben] i.H.v. einheitlich 40%
 - 3.) + Abschreibungen (s. unten)
 - 4.) +/- Erhöhung/Minderung der Pensionsrückstellungen (s. unten)
 - 5.) – Investitionen in das Anlagevermögen
 - 6.) -/+ Erhöhung/Minderung des Working Capital (Umlaufvermögen ./.. kurzfr. Verbindl.)
 - 7.) – Fremdkapitalzinsausgaben (a.k.a. FK-Kosten)
- = **Freier Cash-Flow (FCF)**

Zu beachten ist, dass hierbei die FK-Kosten nicht, wie sonst üblich, im FCF enthalten sind. Dies wird Auswirkungen auf die Berechnung des Tax Shield und des Diskontsatzes haben.

Umsatz & Betriebsergebnis (EBIT):

Aufgrund der Erfahrungen der vergangenen Perioden wird folgende Modellannahme für die Berechnung der FCF gemacht:

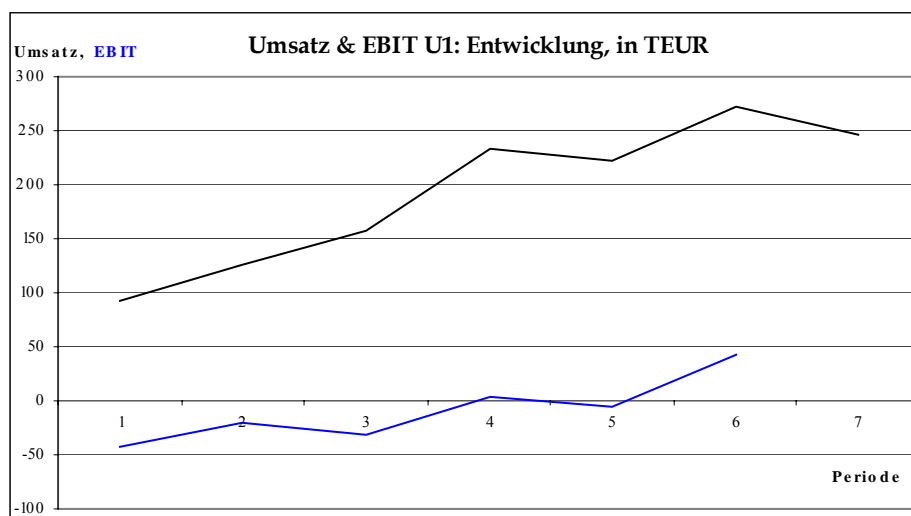


Bild 1: Unternehmensentwicklung in den vergangenen 2 Jahren.

Der Marktanteil wird mit konstant 15,5% angenommen. Das Betriebsergebnis zum Ende des 2. Jahres betrage 100000 EUR. Aus dem *jüngsten* Trend beim Umsatz- und EBIT-Wachstum schätzen wir, dass der EBIT um 15% p.a. wachsen wird.

Verschuldung:

Aufgrund der relativ geringen kurzfristigen Verschuldung, die in Zukunft nicht mehr als EUR 50.000 pro Quartal erreichen sollte, fallen pro Quartal $0,02 \times 50.000 = 1000$ EUR Zinsen an, d.h. 4000 p.a.

Abschreibungen:

Die Abschreibungen betragen 20% des Kapitalbestandes (siehe Investitionen), welcher sich auf derzeit 25000 EUR beläuft.

Pensionsrückstellungen:

Diese betragen 5% der Löhne & Gehälter, welche ab Q9 ca. EUR 208.000 p.a. betragen. Löhne und Gehälter wachsen ebenfalls zum Jahresende um ca. 48 TEUR. Damit beträgt der Zuwachs der Pensionsrückstellungen $0,05 \times 48 \text{ TEUR} = 2400$ EUR p.a.

Investitionen & Working Capital (WC):

Investitionen sollen 20.000 EUR p.a. betragen. Das WC entwickelte sich in TEUR von Q1 zu Q8 wie folgt: 235, 196, 181, 25, 127, 119, 165, 140, 112. Ein Trend lässt sich wegen der Ausreißer hier kaum anpassen, weshalb ein momentaner WC von 150.000 unterstellt sei und ein Wachstum von 10% p.a.

Goodwill / Markenwert:

Derartige softe Faktoren sind zunächst nicht mit eingepreist und werden im weiteren Verhandlungsverlauf diskutiert. An dieser Stelle sei nur gesagt, dass unser Unternehmen der Technologieführer am Markt ist und relativ zum Umsatz überdurchschnittliche Bekanntheitswerte hat. Damit wird der Markenname einen in der Branche überdurchschnittlichen Wert aufweisen.

Diskontsatz EK:

Der Diskontsatz für das EK soll mit dem CAPM berechnet werden. Aus den allgemeinen Marktdaten nehmen wir als risikolosem Zinssatz r_f 10-jährige Bundesanleihen mit 3,1% p.a. an, die Marktprämie betrage 6,9% ($= r_m - r_f$), mit $r_m = 10\%$ (DAX-History von Börse Stuttgart). Die Ermittlung des Beta-Faktors β ist ein Problem. Nicht gehandelte, junge Unternehmen weisen ein hohes Risiko auf, weshalb wir ein Beta von 3 annehmen wollen. Damit ist der Diskontsatz $r_{EK} = r_f + \beta(r_m - r_f) = 23,8\%$.

Unternehmenswert:

Die EE² AG soll noch in diesem Jahr verkauft werden. Als Basis für die Berechnungen und Steigerungsraten dienen daher obige Werte der einzelnen FCF-Posten.

Ab dem 3. Jahr wachsen die einzelnen Posten des FCF und EBIT in Abhängigkeit von t wie oben beschrieben und fallen zum Jahresende an (Rechnungsvereinfachung, Summenindex beginnt dann bei 1, nicht 0). Die weiteren Anweisungen folgen:

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie den Unternehmenswert durch Diskontierung der Free-Cash-Flows (FCF) in den folgenden Jahren auf den heutigen Zeitpunkt (nachschiebige Diskontierung, d.h. alle Kosten und Einnahmen sollen im Programm zum Ende des Jahres anfallen und folglich um 1 ganzes Jahr diskontiert werden .. in Mathematica wäre diese Annahme überhaupt nicht nötig, aber im Interesse der Übersichtlichkeit sei sie gestellt.).

Diskontieren Sie

- a) die FCF der kommenden 30 Jahre (Klassische abgezinste Summe der FCF in $t=[1,T]$),
- b) alle künftigen FCF bis $t = \infty$.

Verfahren Sie bei der Modellierung wie folgt:

1. Definieren Sie die zeitabhängigen Funktionen jedes Postens der FCF-Berechnung nach dem oben angegebenen Schema anhand der Aufgabenstellung.
2. Definieren Sie die zeitabhängige FCF-Funktion als Summe der Funktionen aus 1.
3. Zeigen Sie in einer Tabelle mit beschrifteten Spalten die Entwicklung jedes FCF-Postens in den kommenden 30 Jahren (Tipp: Befehl *TableForm* nutzen).

4. Stellen Sie den Verlauf *aller* FCF-Posten (d.h. Funktionen) in einem 2D-Bild dar. Abszisse ist die Zeit t (Tipp: Befehl *Plot* nutzen). Beschriften Sie auch die Axen (nicht zu überladen).
5. Diskontieren Sie FCF, wie oben verlangt.

Quellen:

Perridon/Steiner: Finanzwirtschaft der Unternehmung, 13. A., Verlag Vahlen, München, 2004

Börse Stuttgart: Bundesanleihen, <http://www.boerse-stuttgart.de/zsk/index.php?code=ba>, (13.06.2005)

Börse Stuttgart: DAX-History. <http://www.boerse-stuttgart.de/>, (13.06.2005)

Günther, Thomas: Skript zur Vorlesung „Unternehmensbewertung“, TU Dresden, 04/2005.