

„Lineare und nichtlineare dynamische Modelle & Modellierung“

Aleksandar Ivanov

Aufgabe: Frequenzanalyse von (periodischen) Zeitreihen/Signalen

a) Bestimmung von

- i) Fouriertransformierte und
- ii) Spektrum

der in Abb. 1 skizzierten periodischen Funktion $y(t)$.

b) Die Impulsantwort eines linearen Filters ist eine Rechteckfunktion der Zeitdauer T und der Amplitude $A = 1$. Wie sieht die Antwortfunktion $y(t)$ des Filters im Zeitbereich aus,

wenn das Eingangssignal $x(t)$

- i) eine ebensolche Rechteckfunktion ist,
- ii) wenn das Eingangssignal eine periodische Schwingung der Form $x(t) = a \cos(t)$ ist?

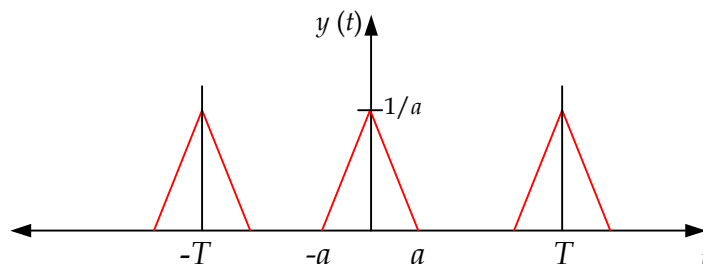


Abbildung 1: $y(t)$ sei unendliche Folge an Dreieckspulsen

Antworten

9. a) - i) Fouriertransformierte des (beobachteten) Signals $y(t)$ *

Vorbemerkungen

- Eines der wenigen Integrale, die für reelle und komplexe Zahlen die gleiche Form haben, ist, was unten zum Tragen kommen wird:

$$\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1) \quad (1)$$

- analytische Darstellung des beobachteten/gemessenen Signals $y(t)$:

$$y(t) = \frac{1}{a} \left(-\frac{|t|}{a} + 1\right) \otimes \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT) \quad (2)$$

- \otimes symbolisiert die Faltung; das Symbol δ ist die Delta-Distribution (auch Delta-Puls, Dirac-Puls u.ä. genannt), also keine Funktion, da δ nur als Integral, etwa im Faltungsintegral

$$(f \otimes \delta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad (3)$$

existiert.

- die Summe $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT)$ stellt eine unendliche äquidistante Aneinanderreihung von Delta-Distributionen/Dirac-Pulsen dar und wird Kamm-Distribution genannt

- Ein Integral mit Delta-Distribution $\delta(x - \pi/2)$ tastet die integrierte Funktion (zum Bsp. $\sin x$) an der Stelle $x = \pi/2$ ab (Signalverarbeitung):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x) \delta(x - \frac{\pi}{2}) dx = \frac{\pi}{2}$$

- das Faltungsintegral (3) <<tastet die gesamte Funktion ab?>>, woraus folgt, dass die Faltung mit der Kamm-Distribution, eine Funktion unendlich oft im Abstand T dupliziert (vgl. Abbildung 1)

- es gilt das die Fouriertransformierte $\mathfrak{N}(f)$ einer Faltung \otimes , dem Produkt der Fouriertransformierten der zu faltenden Funktionen entspricht:

$$F\{(f \otimes h)(t)\} = F\{f(t)\} \times F\{h(t)\} = \mathfrak{N}(f)$$

- damit ist die gesuchte Fouriertransformierte der Funktion (1), $F\{y(t)\}$, das Produkt

$$F\left\{\frac{1}{a} \left(-\frac{|t|}{a} + 1\right)\right\} \times F\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT)\right\} \quad (4)$$

* In der Praxis ist $y(t)$ diskrete Zeitreihe/Messreihe eines realen Systems (Börsenkurse, elektr. Impulse, etc.) und es kommt die diskrete Fourieranalyse (oft in Form der Fast Fourier Transformation, FFT) zum Einsatz \rightarrow Zeitreihenanalyse

Bestimmung der Fouriertransformierten, $F\{\frac{1}{a}(-\frac{|t|}{a}+1)\}$, eines Dreiecks:

- die Fouriertransformation ist eine lineare Integraltransformation

$$F\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi ift} dt$$

und stellt die Transformation einer Funktion/eines Signals $f(t)$ vom Zeitbereich t in den Frequenzraum $f = 1/t$ dar

- die Fouriertransformierte eines Dreiecksimpulses lautet:

<<s. Tafel>>

(5)

- für $F\{\frac{1}{a}(-\frac{|t|}{a}+1)\}$ ergibt sich $\text{sinc}^2(\pi fa)$ (s. Abb. 2, f = Frequenz),

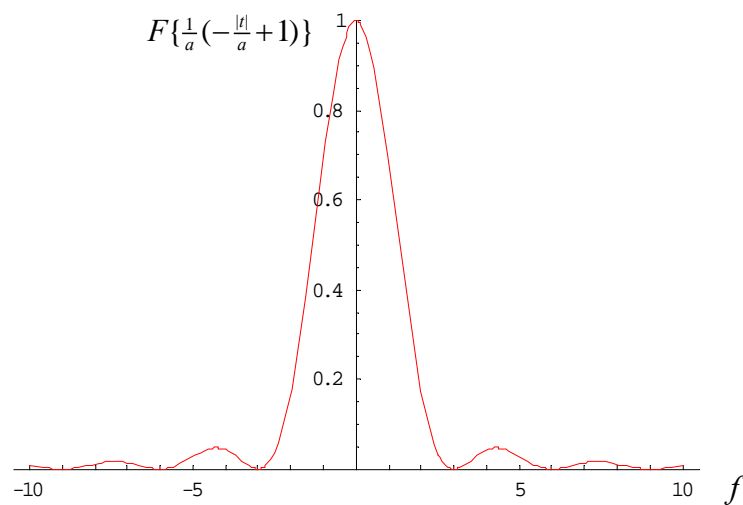


Abbildung 2: Fouriertransformierte des Dreieckimpulses, $F\{\frac{1}{a}(-\frac{|t|}{a}+1)\}$, mit Höhe $a = 1$

Bestimmung der Fouriertransformierten, $F\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t-mT)\}$, des Dirac-Kamms:

- da die Delta-Distribution das neutrale Element der linearen Integraltransformation F ist, ergibt sich für den Dirac-Kamm, der eine Summe von Delta-Distributionen ist

$$\begin{aligned}
 F\{\delta(t-mT)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t-mT) e^{-2\pi ift} dt \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi if(mT)} \\
 &= f_0 \text{comb}(f, f_0) \\
 &= f_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(f-mf)
 \end{aligned} \tag{1}$$

mit $f_0 = 1/T$, was wiederum eine Summe von Kamm-„Funktionen“, diesmal jedoch im Frequenzbereich f , ist

Fouriertransformierte der Gesamtfunktion $y(t)$

- aus (5) und (1) ergibt sich durch Multiplikation die analytische Lösung

$$\begin{aligned}
 F\{y(t)\} &= \left(\frac{\sin(\pi fa)}{\pi fa} \right)^2 \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi if(mT)} \\
 &= \text{sinc}^2(\pi fa) f_0 \times \text{comb}(f, f_0)
 \end{aligned} \tag{2}$$

- diese Funktion ist komplexwertig und wird üblicherweise nicht dargestellt (möglich wäre eine 3D-Abbildung mit einer Achse für den Imaginärteil, die aber <<nicht sinnvoll interpretierbar ist?>>)

9. a) - ii) Spektrum des (beobachteten) Signals $y(t)$

- das Spektrum eines Signals gibt Aufschluß über die „Intensitäten“ seiner Frequenzkomponenten und ist definiert als Betragsquadrat der Fouriertransformierten des (beobachteten) Signals, $y(t)$

$$S(f) = |F\{y(t)\}|^2$$

- für $x \in \mathbb{C}$ gilt: $|x|^2 = x \cdot \bar{x} \in \mathbb{R}$ mit \bar{x} die Komplex-Konjugierte zu x – damit ist das Spektrum eine reellwertige Funktion und der Graph wird in Abb. 3 & 4 gezeigt

- ein glattes (in der Praxis ist damit nicht stetige Differenzierbarkeit gemeint)

Spektrum ohne ausgeprägte Peaks ist ein Hinweis, dass es sich nicht um einen periodischen Vorgang handelt – Vorgänge ohne Periodizität sind einer Prognose prinzipiell nicht zugänglich - ein Spektrum mit ausgeprägten Peaks (s. bspw. Abbildungen 3 & 4) zeugt von Periodizität, und Prognosen sind möglich

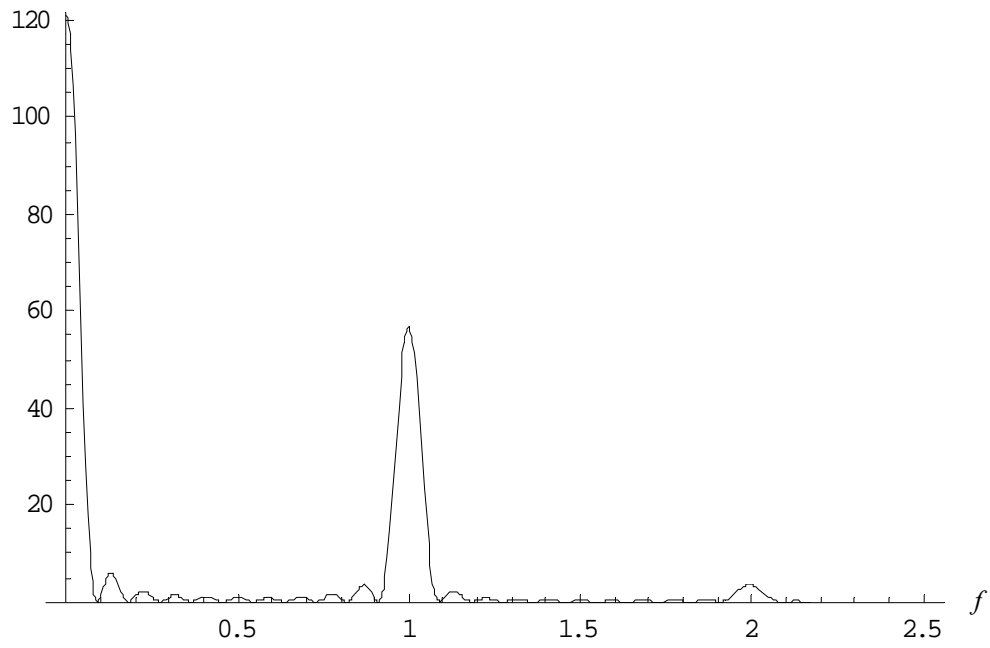


Abbildung 3: Spektrum von $y(t)$ für $a = 1$ und $T = 3$

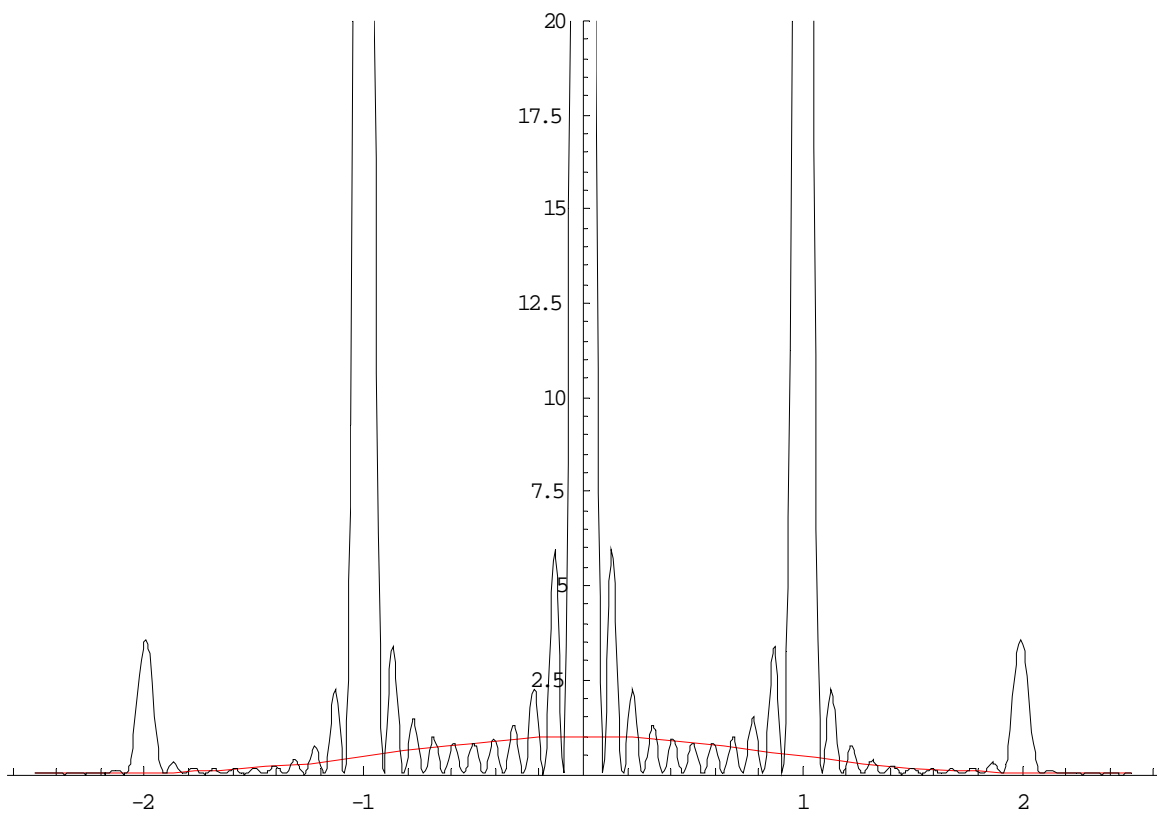


Abbildung 4: Spektren von $y(t)$ und von $\text{Sinc}^2(\pi f a)$ zum Vergleich ($a = 1$, $T = 3$, $f = t/T$)

- die analytische Darstellung des Spektrums lautet

<<s. Tafel>>

- für $m \rightarrow \infty$ werden die Peaks immer höher (s. Abb 5 & 6)

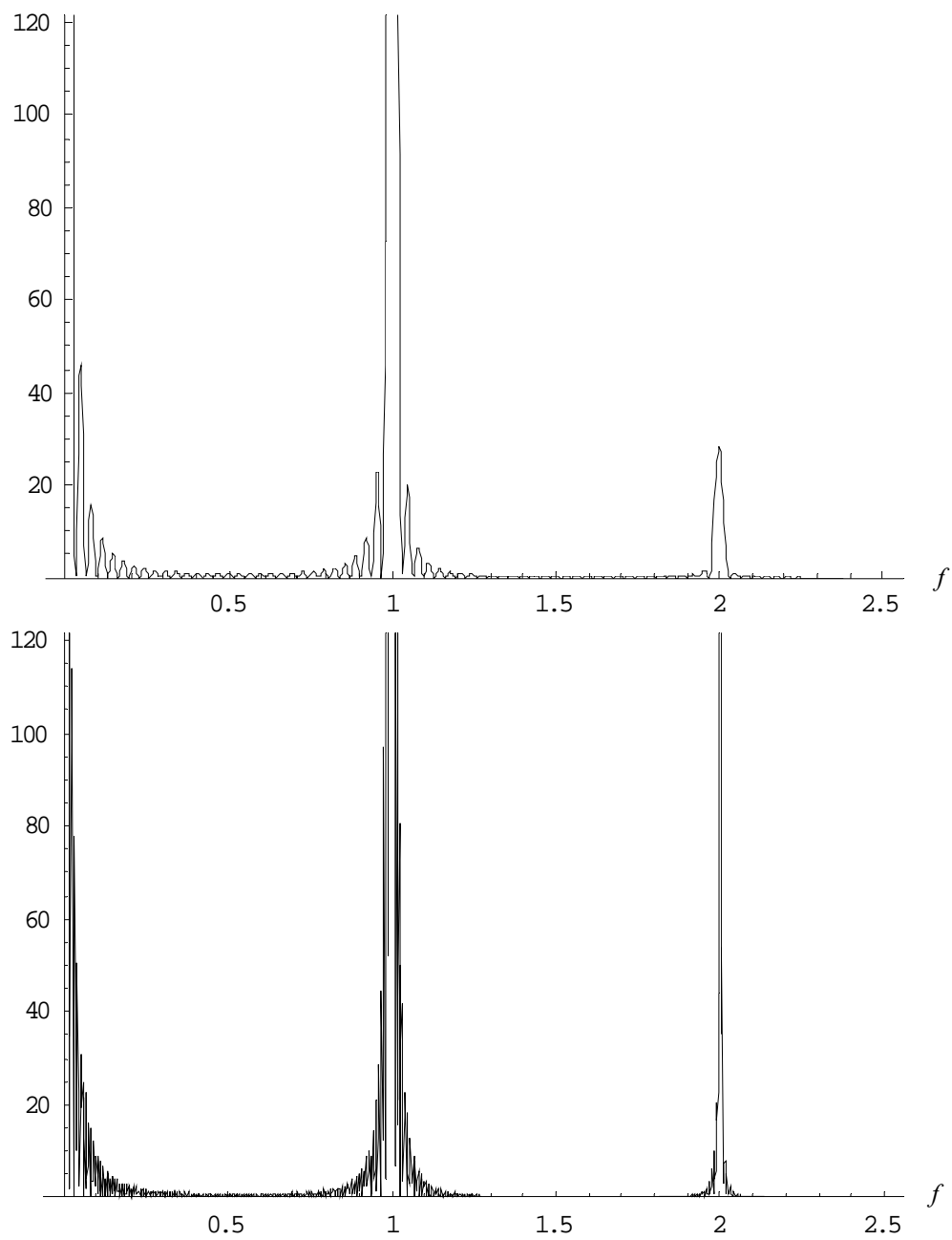


Abbildung 5: Spektrum von $y(t)$ wie oben für $m = 15$ (oben) und $m = 100$ (unten)

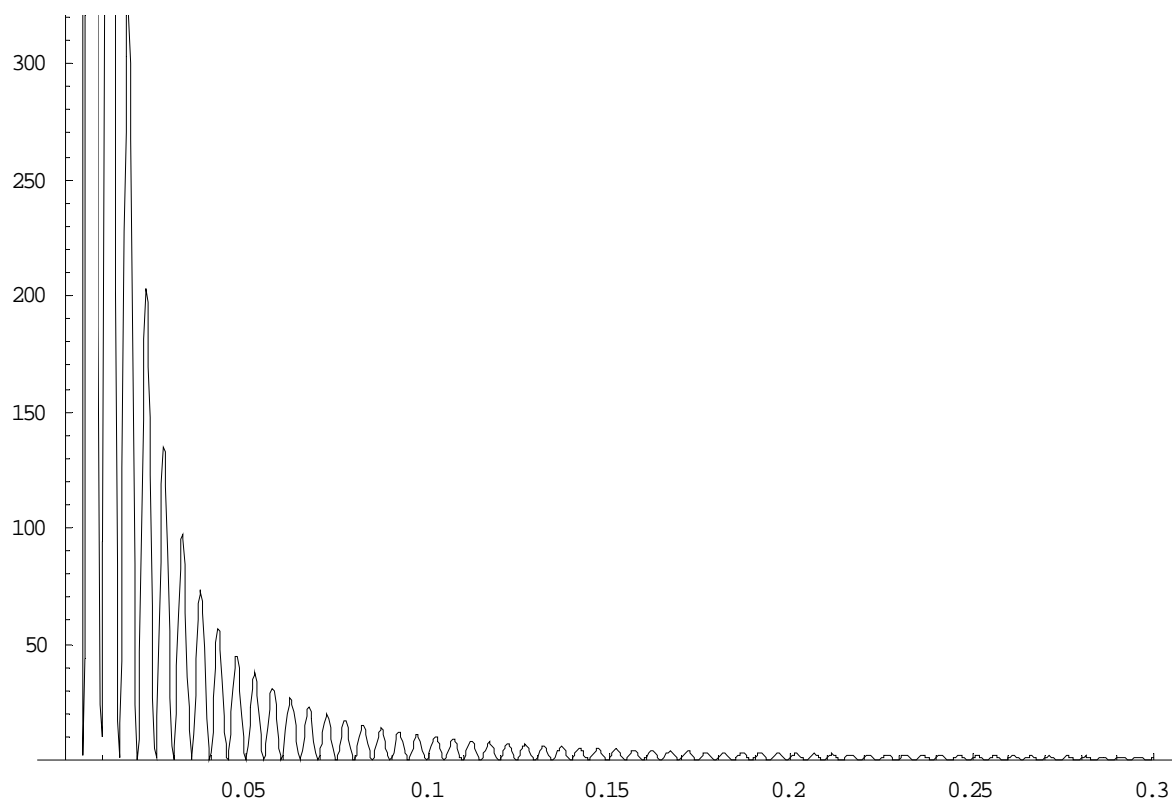


Abbildung 6: Spektrum für $y(t)$ wie oben mit $m = 100$, Vergrößerung

9. b) - i) Antwortfunktion eines linearen Filters mit $h(t) = x(t) = A \cdot \text{rect}_T$, $A = 1$

Vorbemerkungen

- ein lineares Filter ist ein zeitinvariantes lineares dynamisches System (engl. linear time-invariant system, LTI-System), <<d.h. ein autonomes System (auch gekoppelter möglich?) linearer Differentialgleichungen?>>; es gibt keinen Zufall in LTI-Systemen
- der deterministisch-lineare Charakter eines LTI-Systems erlauben es, bei Kenntnis der Impulsantwort $h(t)$ des LTI-Systems (Reaktion auf einen Dirac-Puls), für beliebige Eingangssignale $x(t)$ die Antwortfunktion $y(t)$ (das, was am System beobachtet/gemessen wird) zu bestimmen ohne die innere „Struktur“ des Systems kennen zu müssen – das System bleibt eine Black-Box (Bsp: Aktienmarkt, unbekannte Maschine die elektrische Signale ausgibt) aber das Verhalten kann trotzdem prognostiziert werden (leider sind Aktienmärkte keine LTI-Systeme)
- in Teilaufgabe a) war $y(t)$ gegeben, hier sind wir in einer vorgelagerten Analysestufe, und müssen $y(t)$ zunächst bestimmen – freilich ist bei Unkenntnis von $h(t)$ wiederum nur die Arbeit mit dem beobachteten/gemessenen Signal/Daten $y(t)$

möglich \rightarrow *Zeitreihenanalyse* der vorliegenden Daten $y(t)$, welche in der Realität immer diskrete Zeitreihen/Messreihen sein werden (s. Fußnote S. 2)

Bestimmung der Antwortfunktion im Zeitbereich

- Eingangssignal $x(t)$ = Rechteckpuls mit Amplitude $A = 1$ und Dauer T (s. Abb. 7)
- Impulsantwort $h(t)$ = ein ebensolcher Rechteckpuls = $x(t)$

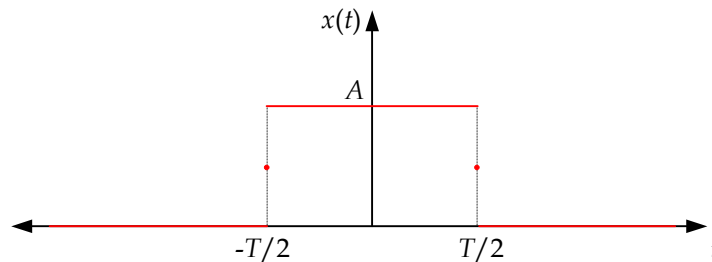


Abbildung 7: Rechteckpuls mit Amplitude A und Dauer T

- bei LTI-Systemen gilt: Antwortfunktion im Zeitbereich

$$y(t) = h(t) \otimes x(t) \quad (3)$$

- aus den oben genannten Eigenschaften der Faltung folgt:

$$F\{y(t)\} = F\{h(t)\} \times F\{x(t)\}$$

und weiterhin

$$y(t) = F^{-1}\{F\{h(t)\} \times F\{x(t)\}\} \quad (4)$$

- für die Aufgabe ist es einfacher den Weg über die inverse Fouriertransformation

(4) statt über die Faltung (3) zu gehen

- Fouriertransformierte F des Rechteckpulses

$$A \cdot \text{rect}_T = x(t) = \begin{cases} A & \text{falls } -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sonst} \\ \frac{A}{2} & \text{falls } |t| = \frac{T}{2} \end{cases}$$

ergibt sich wie folgt

<<s. Tafel>>

- da die Fouriertransformierte eines Rechteckpulses $x(t)$ die $\text{Sinc}(\pi fT)$ -Funktion ist, ist wegen

$x(t) = h(t)$ aus (4) nun zur Ermittlung von $y(t)$ noch die inverse Fouriertransformierte von $\text{Sinc}^2(\pi fT)$, $F^{-1}\{\text{Sinc}^2(\pi fT)\}$, gesucht

- aus Aufg. 9. a) – i) ist bekannt dass $F\{\text{Dreieck}_a\} = \text{Sinc}^2(\pi f a)$ – damit ist

$$F^{-1}\{\text{Sinc}^2(\pi fT)\} = \text{Dreieck}_T$$

mit

$$\text{Dreieck}_T = y(t) = \frac{1}{T} \left(-\frac{|t|}{T} + 1\right)$$

- Abb. 8 veranschaulicht die gefundene Impulsantwort des linearen Filters

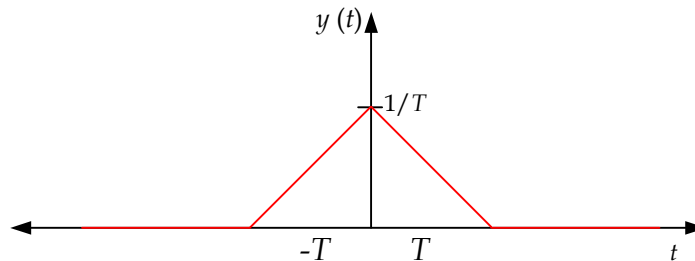


Abbildung 8: $y(t)$ eines linearen Filter für den Fall $h(t) = x(t) = A \cdot \text{rect}_T$

- unter <http://www.getsoft.net/fouriertrans/animationen/animation04.html> gibt es eine interaktive Animation dieses Faltungsvorgangs, der hier über den Weg der inversen Fouriertransformation ausgeführt wurde (_4)

9. b) - ii) $y(t)$ eines linearen Filters mit $h(t) = A \cdot \text{rect}_T$, $A = 1$ und $x(t) = \alpha \cos(\omega t)$

- analog zu 9. b) . i) wird die Antwortfunktion über die inverse Fouriertransformation (_4) ermittelt

- die Fouriertransformierte der Impulsantwort, $F\{h(t)\}$, ist wie oben $\text{Sinc}(\pi fT)$

- die Fouriertransformierte des Eingangssignals $x(t) = \alpha \cos(\omega t)$ ergibt sich zu

$$F\{\alpha \cos(\omega_0 t)\} = \alpha F\{\cos(\underbrace{2\pi f_0 t}_{\omega_0})\} = \frac{1}{2}(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0))$$

- das Produkt $\frac{1}{2} \text{sinc}(\pi fT) \times (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0))$ muss nun invers

Fouriertransformiert werden

<<s. Tafel>>